数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 14-21

Indecomposability of modular standard modules of association schemes *

信州大学 理学部 数理・自然情報科学科　花木　章秀 †
Akihide Hanaki
Faculty of Science, Shinshu University
長崎大学 教育学部　島袋　修 ‡
Osamu Shimabukuro
Faculty of Education, Nagasaki University

1　はじめに

一般に, 代数同型なアソシエーションスキームを区別する事は難しいが, 標数 p の体上で隣接行列から得られる行列の階数 (p-rank) を考えることでこれらを区別できる場合がある [2, 7]. p-rank は正標数の体上で隣接代数の標準加群 (モジュラー標準加群) を考えることと関係があり, 場合によっては p-rank よりも情報を多く持つ場合がある [5]. つまり, アソシエーションスキームから得られるモジュラー標準加群の構造によって, アソシエーションスキームの組合せ論的な特徴付けが可能であることを示唆している. しかし, 一般に, その代数構造が複雑なため標準加群の構造を決定することは難しく, 効率的な構造の決定方法が必要である. 本稿では, アソシエーションスキームのモジュラー表現の理論を構築するために素数べき位数の剰余的細スキームのモジュラー隣接代数の構造とそれらの標準加群が直既約加群であることを証明する. また, この結果に関連して, 完全グラフのリース積のモジュラー標準加群の直既約直和分解を比較的簡単に考えることができる.

* 本研究は科研費 (課題番号:25400011) の助成を受けたものである.
† 〒390-8621 松本市旭 3-1-1,hanaki@shinshu-u.ac.jp
‡ 〒852-8131 長崎市文教町１－１４, shimabukuro@nagasaki-u.ac.jp

2 アソシエーションスキーム

ここでは必要なアソシエーションスキームとその表現の定義を述べる．詳しくは [1, 6, 8] を参照してほしい．

X を有限集合とし,S を $X\times X$ の空でない部分集合族とする．(X,S) がアソシエーションスキームとは次を満たすときをいう．

(1) $X\times X=\bigcup_{s\in S}s$ かつ $s,s'\in S$ $(s\neq s')$ に対して $s\cap s'=\emptyset$,
(2) $1_X=\{(x,x)\mid x\in X\}\in S$,
(3) $s\in S$ に対して, $s^*=\{(y,x)\mid (x,y)\in s\}\in S$,
(4) 任意の $s,t,u\in S$ に対して, ある非負整数 p_{st}^u が存在して, u の元 (x,y) の選び方に依らずに $p_{st}^u=\sharp\{z\in X\mid (x,z)\in s,\ (z,y)\in t\}$ が成り立つ．

$p_{ss^*}^{1_X}$ を s の次数とよび n_s で表す．$|X|$ をアソシエーションスキーム (X,S) の位数とよぶ．$M_X(\mathbb{Z})$ を有理整数環 $\mathbb{Z}$ を成分とする全行列環で, 行と列は X によってインデックス付けされているものとする．$s\subset X\times X$ に対して,

$$(A_s)_{xy}=\begin{cases}1 & (x,y)\in s\text{ のとき},\\ 0 & \text{その他}.\end{cases}$$

とすることで．隣接行列 $A_s\in M_X(\mathbb{Z})$ が定義できる．アソシエーションスキームの定義から

$$\mathbb{Z}S=\bigoplus_{s\in S}\mathbb{Z}A_s$$

は $M_X(\mathbb{Z})$ の部分代数になる． R を単位的可換環とすると, $M_X(R)$ の R-部分代数 $RS=R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}S$ が定義できて, これを R 上の (X,S) の**隣接代数**とよぶ．また, $\mathfrak{X}=(X,S)$ に対しても, その隣接代数を $R\mathfrak{X}$ と書くことにする．R 上の (X,S) の表現は RS からある次数の全行列環への R 代数準同型であるが, RS は $M_X(R)$ の部分代数なので, 埋め込み写像が表現であり, これを**標準表現**とよぶ．対応する (右)RS-加群を R 上 (X,S) の**標準加群**とよび, 基底として X を取ることができ, これを RX とかく．S の部分集合 T が $p_{st}^u=0$ $(\forall s,t\in T,\ u\notin T)$ を満たすとき T を S の**閉部分集合**とよぶ．閉部分集合から部分スキームと剰余スキームが定義できる．アソシエーションスキーム (X,S) が**細** *(***スキーム***)* であるとは, $n_s=1$ $(\forall s\in S)$ のときをいい, 有限群の正則置換表現から得られるので, 本質的に有限群と考えることができる．**細剰余** $\mathbf{O}^\theta(S)$ とは, S の閉部分集合で剰余スキーム $S/\!/\mathbf{O}^\theta(S)$ が細である最小なものである．$(\mathbf{O}^\theta)^n(S)$ を $\mathbf{O}^\theta((\mathbf{O}^\theta)^{n-1}(S))$ によって

帰納的に定義して, $(\mathbf{O}^{\theta})^n(S)=1$ となる n が存在するとき (X,S) を**剰余的細スキーム**とよぶ. また, $\mathfrak{X}=(X,S)$ と $\mathfrak{Y}=(X,T)$ を同じ集合 X 上に定義されたアソシエーションスキームとして, 各 $t\in T$ が S の幾つかの部分集合の和集合であるとき, $\mathfrak{Y}$ を $\mathfrak{X}$ の**融合スキーム**とよび, $\mathfrak{X}$ を $\mathfrak{Y}$ の**裂開スキーム**とよぶ. このとき, RT は RS の部分代数になっていることを注意しておく.

$\mathfrak{X}=(X,S)$ と $\mathfrak{Y}=(Y,T)$ をアソシエーションスキームとして, それぞれの隣接行列を $\{A_i\}_{i=0}^d$ と $\{A'_i\}_{i=0}^f$ とする. ただし, A_0 と A'_0 は単位行列とする.

$s\in S$ と $t\in T$ に対して,

$$s\times t=\{((x,y),(x',y'))\mid (x,x')\in s,\ (y,y')\in t\}\subset (X\times Y)\times(X\times Y)$$

として,

$$S\times T=\{s\times t\mid s\in S,\ t\in T\}$$

とすると $(X\times Y, S\times T)$ はアソシエーションスキームになり, これを $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{Y}$ の**直積**とよび, $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ で表す. $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ の隣接行列は, $(d+1)(f+1)$ 個の行列で:

$$A_0\otimes A'_0,\dots,A_d\otimes A'_f$$

で与えられる.

また, $s\in S$ に対して,

$$\tilde{s}=\{((x,y),(x',y))\mid (x,x')\in s,\ y\in Y\}\subset (X\times Y)\times(X\times Y)$$

とおいて, $t\in T$ に対して,

$$\tilde{t}=\{((x,y),(x',y'))\mid x,x'\in X,\ (y,y')\in t\}\subset (X\times Y)\times(X\times Y)$$

とおく. それらを用いて,

$$S\wr T=\{\tilde{s}\mid s\in S\}\cup\{\tilde{t}\mid t\in T\backslash\{1_Y\}\}$$

と定めると, $(X\times Y, S\wr T)$ はアソシエーションスキームになり, これを $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{Y}$ のレス積とよび, $\mathfrak{X}\wr\mathfrak{Y}$ で表す. $\mathfrak{X}\wr\mathfrak{Y}$ の隣接行列は, $d+f+1$ 個の行列で:

$$A_0\otimes I_{|Y|},\dots,A_d\otimes I_{|Y|},J_{|X|}\otimes A'_1,\dots,J_{|X|}\otimes A'_f$$

で与えられる. アソシエーションスキームのレス積の既約表現については [3] に述べられている. 明らかに $\mathfrak{X}\wr\mathfrak{Y}$ は $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ の融合スキームであり, これは $R(S\wr T)$ が $R(S\times T)$ の部分代数であることを意味する.

3 V_W の直既約性

F を体として, $n_1,\ldots,n_r$ を 2 以上の整数とする. 次のように F 代数 V を定義する.

$$V = V(n_1,\ldots,n_r) = F[t_1,\ldots,t_r]/(t_1^{n_1},\ldots,t_r^{n_r}).$$

V は剰余環だが, その元を t_i と表すことにして, 集合 B を次のように定める.

$$B = \{t_1^{e_1}\ldots t_r^{e_r} \mid 0 \le e_i < n_i \quad (1 \le i \le r)\}.$$

B は V の基底である.

また, 次の集合を基底とする V の部分代数 $W = W(n_1,\ldots,n_r)$ を考える.

$$B' = \{1\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} \{t_1^{n_1-1}\ldots t_{i-1}^{n_{i-1}-1} t_i^{e_i} \mid 1 \le e_i \le n_i - 1\} \right).$$

B' の元の積を考えることで W の構造が分かる. つまり,

$$W = F[u_0,u_1,\ldots,u_\ell]/\mathcal{I},$$

ただし, $\ell = \sum_{i=2}^{r}(n_i - 1)$ であり, $\mathcal{I}$ は,

$$\{u_0^{n_1}\} \cup \{u_i^2 \mid 1 \le i \le \ell\} \cup \{u_i u_j \mid 0 \le i < j \le \ell\}.$$

で生成されるイデアルとする.

V を (右)W-加群として考え, その自己準同型環 $\mathrm{End}_W(V)$ にて非同型写像全体の集合がイデアルになることから次のことが言える.

Proposition 1. 自己準同型環 $\mathrm{End}_W(V)$ は局所環である. よって V は直既約 W-加群である.

N_n を $n \times n$ 行列で

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, $\Phi : t_1^{e_1}\ldots t_r^{e_r} \mapsto N_{n_1}^{e_1} \otimes \cdots \otimes N_{n_r}^{e_r}$ は V の正則表現になる.

Proposition 2. Φ の W への制限は W の直既約表現である.

4 素数べき位数の剰余的細スキーム

F を標数 p の体とし, (X,S) を位数が p べきの剰余的細スキームとする. ここでは, 標準加群 FX が FS-加群として直既約であることを証明する. つまり, 標準加群 FX の直既約直和分解が決定できる. まず, 次の補題を考える.

Lemma 3. F を標数 p の体とし, $\mathfrak{C}_p$ を位数 p の巡回群 C_p の正則置換表現から得られるアソシエーションスキームとする. すると, r 個のレス積 $\mathfrak{C}_p \wr \cdots \wr \mathfrak{C}_p$ の F 上標準加群 FX は直既約である.

この補題は $\mathfrak{C}_p = (C_p, C_p)$ で, $F\mathfrak{C}_p \cong F[t]/(t^p)$ であることに注意すると, $\mathfrak{C}_p \wr \cdots \wr \mathfrak{C}_p$ の標準加群は $F(C_p \times \cdots \times C_p)$ であることから

$$\begin{aligned} F(C_p \times \cdots \times C_p) &\cong FC_p \otimes \cdots \otimes FC_p \\ &\cong F[t]/(t^p) \otimes \cdots \otimes F[t]/(t^p) \\ &\cong F[t_1, \ldots, t_r]/(t_1^p, \ldots, t_r^p) \\ &= V(p, \ldots, p). \end{aligned}$$

また, 隣接代数 $F(\mathfrak{C}_p \wr \cdots \wr \mathfrak{C}_p)$ は, $F(C_p \times \cdots \times C_p)(\cong V(p, \ldots, p))$ の部分代数で, $F\mathfrak{C}_p$ の基底である J_p には t^{p-1} が対応しているので $F(\mathfrak{C}_p \wr \cdots \wr \mathfrak{C}_p) \cong W(p, \ldots, p)$ がわかる. 以上のことから, Proposition 1 より標準加群 FX の直既約性がわかる.

剰余的細スキーム (X,S) のとき, 閉部分集合の有限列

$$S = S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_r = 1$$

で各組成剰余 $S_{i-1}/\!/S_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ が細となるものが存在する. 特に位数が素数べきの場合は $S_{i-1}/\!/S_i = C_p$ $(i = 1, \ldots, r)$ である. これは, (X,S) が $\mathfrak{C}_p \wr \cdots \wr \mathfrak{C}_p$ の裂開スキームであることを意味する. このとき, 標準加群 FX について考えると, Lemma 3 より, FX は $F(\mathfrak{C}_p \wr \cdots \wr \mathfrak{C}_p)$-加群として直既約である. また, それと同時に $F(\mathfrak{C}_p \wr \cdots \wr \mathfrak{C}_p)$ は, FS の部分代数なので, FX は, FS-加群としても直既約であることが言える.

Theorem 4. F を標数 p の体とし, (X,S) を位数 p べきの剰余的細スキームとする. すると, 標準加群 FX は直既約 FS-加群である.

5 完全グラフのレス積

前回の講演 [4] で扱った正標数の体上における完全グラフから得られるアソシエーションスキームのレス積の標準加群の直既約直和分解を今回の結果を用いて簡単に証明できる.

$q \geq 2$ に対して, $\mathfrak{K}_q = (Y,T)$ を頂点数 q 個の完全グラフから得られるアソシエーションスキームとする. つまり, $|Y| = q$ で T は二つの関係 $\{(x,x) \mid x \in Y\}$ と $\{(x,y) \mid x \neq y, x, y \in Y\}$ からなる.

$q_1, q_2, \ldots, q_r$ を 2 以上の整数の列とする. また, $(X,S) = \mathfrak{K}_{q_1} \wr \cdots \wr \mathfrak{K}_{q_r}$ とおく. ただし $\mathfrak{K}_{q_i} = (X^{(i)}, S^{(i)})$ とする. $|X^{(i)}| = q_i$, $X = X^{(1)} \times \cdots \times X^{(r)}$, $S = S^{(1)} \wr \cdots \wr S^{(r)}$ である. 隣接行列は

$$A_i = J_{q_1} \otimes \cdots \otimes J_{q_{i-1}} \otimes (J_{q_i} - I_{q_i}) \otimes I_{q_{i+1}} \otimes \cdots \otimes I_{q_r} \quad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

で与えられるが, 基底変換により,

$$B_i = \sum_{j=0}^{i} A_j = J_{q_1} \otimes \cdots \otimes J_{q_i} \otimes I_{q_{i+1}} \otimes \cdots \otimes I_{q_r} \quad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

を FS の基底と考えることができる. F を標数 p の体とする. 隣接代数 FS は $\{B_i \mid i = 0, 1, \ldots, r\}$ を基底とする $M_{X^{(1)}}(F) \otimes \cdots \otimes M_{X^{(r)}}(F)$ の部分代数である. 標準加群は $F(X^{(1)} \times \cdots \times X^{(r)}) \cong FX^{(1)} \otimes \cdots \otimes FX^{(r)}$ である.

$FX^{(i)}$ は自然な基底 $X^{(i)} = \{x_1, \ldots, x_{q_i}\}$ を持つが, これも次のように基底の変換を行う. $p \mid q_i$ のとき,

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \sum_{j=1}^{q_i} x_j, \quad y_k = x_k - x_1 \quad (k = 3, 4, \ldots, q_i),$$

$p \nmid q_i$ のとき,

$$y_1 = \sum_{j=1}^{q_i} x_j, \quad y_k = x_k - x_1 \quad (k = 2, 3, \cdots, q_i)$$

とすると, 自明でない $FS^{(i)}$ の作用は J_{q_i} の作用なので, 基底 $\{y_1, \ldots, y_{q_i}\}$ に関する J_{q_i} の表現行列は

$$p \mid q_i \text{ のとき}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ で}, p \nmid q_i \text{ のとき}, \begin{pmatrix} q_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

である. そこで,

- $\Delta = \{i \mid 1 \leq i \leq r,\ p \mid q_i\}$,
- $i \in \Delta$ のとき $T_i = \{1, 2\}$, $i \notin \Delta$ のとき $T_i = \{1\}$,
- $U_i = \bigoplus_{j \in T_i} Fy_j$,
- $\delta(k) = |\Delta \cap \{1, \ldots, k\}|$

とすると, 次のように標準加群の直既約直和分解をえる.

Theorem 5.

$$FX = FX^{(1)} \otimes \cdots \otimes FX^{(r)} = \bigoplus_{i=0}^{r} \bigoplus U_1 \otimes \cdots \otimes U_i \otimes Fy_{\ell_{i+1}} \otimes \cdots \otimes Fy_{\ell_r},$$

ただし, 二番目の直和は全ての $\ell_{i+1} \notin T_{i+1}$ かつ $1 \leq \ell_k \leq q_k$ $(k = i+2, \ldots, r)$ となる $(\ell_{i+1}, \ldots, \ell_r)$ 全てをはしる. さらに, 直和因子 $U_1 \otimes \cdots \otimes U_i \otimes Fy_{\ell_{i+1}} \otimes \cdots \otimes Fy_{\ell_r}$ と $U_1 \otimes \cdots \otimes U_{i'} \otimes Fy_{\ell'_{i'+1}} \otimes \cdots \otimes Fy_{\ell'_r}$ が FS-加群として同型であるための必要十分条件は $i = i'$ である.

右辺の因子達の和が直和であることと, 全ての直和因子が FX の FS-部分加群であることは簡単にわかる. 直和因子 $U = U_1 \otimes \cdots \otimes U_i \otimes Fy_{\ell_{i+1}} \otimes \cdots \otimes Fy_{\ell_r}$ について考える.

$$k \in \Delta \text{ のとき } M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ かつ } k \notin \Delta \text{ のとき } M_k = \begin{pmatrix} q_k \end{pmatrix}$$

とおく. U 上 B_j の作用は, $0 \leq j \leq i$ のとき,

$$M_1 \otimes \cdots \otimes M_j \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

である. ただし, I は次数 1 か 2 の単位行列とする. また, $j > i$ のとき, 0 である. $\{B_j \mid 1 \leq j \leq i,\ j \in \Delta\}$ で生成される FS の部分代数 W を考えると, U 上 W の作用は本質的に $W \cong W(2, \ldots, 2)$ ($\delta(i)$ 個) である. U 上 W の作用は 0 でないスカラー倍を除いて Proposition 2 のような表現になる. U は直既約 W-加群になるので, 直既約 FS-加群がいえる.

参考文献

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics. I. Association Schemes*, Benjamin-Cummings, Menlo Park, CA, 1984.

[2] A. E. Brouwer and C. A. Van Eijl, *On the p-Rank of the Adjacency Matrices of Strongly Regular Graphs*, Journal of Algebraic Combinatorics: An International Journal **1** (1992), no. 4, 329–346.

[3] A. Hanaki and K. Hirotsuka, *Irreducible Representations of Wreath Products of Association Schemes*, Journal of Algebraic Combinatorics **18** (2003), 47–52.

[4] A. Hanaki and O. Shimabukuro, *Modular adjacency algebras and standard representations of wreath products of complete*, RIMS Kokyuroku **2003** (2016), 112–118.

[5] A. Hanaki and M. Yoshikawa, *On modular standard modules of association schemes*, Journal of Algebraic Combinatorics **21** (2005), no. 3, 269–279.

[6] H. Nagao and Y. Tushima, *Representation of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1989.

[7] R. Peeters, *On the p-ranks of the adjacency matrices of distance-regular graphs.*, J. Algebr. Comb. **15** (2002), no. 2, 127–149.

[8] P. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes, Lecture Notes in Mathematics 1628*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.